

Funktionsuntersuchung rationaler Funktionen

Bsp: $f: x \mapsto \frac{x^3}{x^2-4}$

- Definitionsmenge

Definitionslücken (Nullstellen des Nenners): $x = \pm 2 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

- Symmetrie

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{-x^3}{x^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow \text{Punktsymmetrie bzgl. (0|0)}$$

- Schnittpunkte mit den Achsen

y-Achse: $x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow S_y(0|0)$

x-Achse: $f(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow S_x(0|0) \hat{=} S_y \quad (x=0: \text{dreifache NS})$

- Verhalten an den Definitionslücken

$$x=2: \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Handwritten notes: "wird 0" under $(x-2)$; " $\frac{2}{4}=2$ " under $x+2$; " $\frac{1}{0^+} \rightarrow +\infty$ " and " $\frac{1}{0^-} \rightarrow -\infty$ " under $x-2$.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty \quad (\text{einfache Polstelle} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel})$$

$x=-2$: aus der Symmetrie folgt: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$
Handwritten note: "Skizze!"

- Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot x}{x^2 \cdot (1 - \frac{4}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 - \frac{4}{x^2}} = +\infty$$

Handwritten note: " $\frac{1}{1} \rightarrow 1$ " under the denominator.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (folgt aus der Punktsymmetrie) oder noch mal wie oben

- Asymptoten

Definitionslücken: $x_1 = -2$; $x_2 = 2 \Rightarrow$ senkrechte Asymptoten: $x = -2, x = 2$

Zählergrad = Nennergrad + 1 \Rightarrow schräge Asymptote $a(x)$

Polynomdivision: $x^3 : (x^2-4) = x + \frac{4x}{x^2-4} \Rightarrow \underline{a(x) = x}$
Handwritten notes: " $a(x)$ " under x ; " $\frac{4x}{x^2-4} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ " under the remainder term.

- Monotonie / Extremwerte

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})}{(x^2-4)^2}$$

Nullstellen von $f'(x)$: $x = 0$ (doppelt); $x = \pm \sqrt{12}$ (einfach)

\downarrow
kein Extremum
da kein VZW